Extrema Liés.

Théorème : Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n$. Soit $f, g_1, \dots, g_k \in \mathcal{C}^1(U, \mathbb{R})$.

On pose $\Gamma = \{x \in U \,/\, g_1(x) = \dots = g_k(x) = 0\}$.

On suppose : * $f_{|\Gamma}$ admet un extremum local en $m \in \Gamma$.

* $(D_x g_i)_{1 \leq i \leq k}$ est libre pour $x \in U$

Alors : $\exists (\lambda_1, \dots, \lambda_k) \in \mathbb{R}^k$, $D_m f = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i D_m g_i$.

Lemme : Soient $\varphi, \varphi_1, \dots \varphi_k \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$

Si $\begin{cases} (\varphi_1, \dots, \varphi_k) \text{ est libre} \\ \bigcap_{i=1}^{k} \operatorname{Ker}(\varphi_i) \subset \operatorname{Ker}(\varphi) \end{cases}$ Alors $\exists (\lambda_1, \dots \lambda_k) \in \mathbb{R}^k$, $\varphi = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \varphi_i$

Preuve Lemme : On complete $(\varphi_1, \dots, \varphi_k)$ en une base $(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$

Donc $\exists (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$, $\varphi = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \varphi_i$

Soit $(e_1, \dots, e_n)$ une base de $\mathbb{R}^n$, $\varphi_i(e_j) = \delta_{i,j}$

Soit $j \in [\![k+1, n]\!]$, on a $\begin{cases} e_j \in \operatorname{Vect}(e_{k+1}, \dots, e_n) \\ \forall i \in [\![1, k]\!], \varphi_i(e_j) = 0 \end{cases}$

Donc $\operatorname{Vect}(e_{k+1}, \dots, e_n) \subset \bigcap_{i=1}^{k} \operatorname{Ker}(\varphi_i) \subset \operatorname{Ker}(\varphi)$

D'où $\varphi = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \varphi_i$

Preuve Théorème :

* Montrons que M est une sous-variété :

On pose $g : U \longrightarrow \mathbb{R}^k$
$x \longmapsto (g_1(x), \dots, g_k(x))$ Ainsi, $M = g^{-1}(\{0_{\mathbb{R}^k}\})$

Or pour $x \in U$, par le Théorème du rang, $rg(D_x g) = n - \dim(\mathrm{Ker}(D_x g))$
$= n - \dim\left(\bigcap_{i=1}^{k} \mathrm{Ker}(D_x g_i)\right) = k$

Car $(D_x g_i)$ est libre donc l'intersection des noyaux est de dimension $n-k$.

Ainsi, g est une submersion et M est une sous-variété de dimension $n-k$.

* Montrons que $T_m M = \bigcap_{i=1}^{k} \mathrm{Ker}(D_m g_i)$

- Soit $v \in T_m M$. $\exists I$ ouvert contenant 0 tel que $\gamma : I \to M$ (une courbe)
$\gamma(0) = m$ et $\gamma'(0) = v$.

Ainsi, $\forall i \in [\![1,k]\!], \forall t \in I, g_i(\gamma(t)) = 0$ car $\gamma(t) \in M$.

Donc $\forall i \in [\![1,k]\!], \forall t \in I, D_{\gamma(t)} g_i(\gamma'(t)) = 0$ et pour $t=0$ on a
$\forall i \in [\![1,k]\!]$ $D_m g_i(v) = 0$ donc $T_m M \subset \bigcap_{i=1}^{k} \mathrm{Ker}(D_m g_i)$

- Puis égalité des dimensions.

* Montrons que $T_m M \subset \mathrm{Ker}(D_m f)$:

Soit $v \in T_m M$. Ainsi, $\exists \gamma : I \to M$
$\gamma(0) = m$ et $\gamma'(0) = v$.

Ainsi, $f_{|M}(\gamma(t)) = f(\gamma(t))$ car $\gamma \in M$.

D'où $t \longmapsto D_{\gamma(t)} f(\gamma'(t))$ s'annule en 0.

Donc $D_m f(v) = 0$. Ainsi, $T_m M \subset \mathrm{Ker}(D_m f)$

Donc d'après le lemme, $\exists (\lambda_1, \dots, \lambda_k) \in \mathbb{R}^k$, $D_m f = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i D_m g_i$